Insegnare matematica nella scuola del 2000

Gian Luigi Spada, Anna Maria Benini

(da "Progettazione curricolare e didattica delle discipline" – Armando editore - 2012

1. Premessa

Fin verso gli anni Settanta del secolo scorso la matematica era intesa come disciplina élitaria: vi erano quelli con il "bernoccolo" e quelli senza. Spesso i letterati si vantavano di appartenere a questa seconda categoria, portati a ritenere che la matematica fosse una (inutile?) astruseria per pochi iniziati, i quali erano gelosi della loro iniziazione.

Poi si pensò che potesse esistere un "martello" in grado di creare il famoso bernoccolo. Poiché la matematica era proposta come disciplina essenzialmente formale, per ridurre le difficoltà si ritenne utile interporre tra la situazione concreta e quella simbolica un modello astratto che desse più immediatezza alle strutture matematiche coinvolte. La seconda metà del Novecento vide lo sviluppo di un ampio movimento di ricerca attorno al rinnovamento della didattica della matematica. Emblematiche le figure di Emma Castelnuovo "matematica della realtà", di Michele Pellerey "matematica dal volto umano", senza trascurare i Dipartimenti universitari, i Nuclei di ricerca didattica, le Associazioni disciplinari.

Dopo il "Rapporto europeo sulla qualità dell'istruzione" del 2000, che ha fatto da sfondo alla Conferenza di Lisbona e ai suoi obiettivi, fino alle più recenti Raccomandazioni del Consiglio e del Parlamento Europeo, ritenute strategiche per tutti i Paesi dell'Unione Europea, la matematica è stata inserita fra le competenze chiave per l'esercizio della cittadinanza attiva e per l'apprendimento permanente, divenendo così un "apprendimento di base", da sviluppare e garantire per tutti i giovani come elemento irrinunciabile nella loro formazione e indispensabile per la mobilità lavorativa nei Paesi dell'UE. La matematica nella scuola, quindi, sta trasformando la sua tradizionale immagine ricca di formalismi, tecnicismi, artifizi e di azioni spesso riproduttive o applicative, in un assetto dinamico, a forte valenza formativa, che necessita di ambienti funzionali al suo apprendimento e di opportune strategie didattiche.

2. La natura culturale della matematica e l'insegnamento

La matematica (da μάθημα: conoscenza/apprendimento) è ambito cognitivo sviluppatosi in un ampio arco temporale, che ha portato a un assetto disciplinare articolato e ricchissimo di conoscenze e che richiede una periodica riflessione sul problema dell'efficacia del rapporto insegnamento-apprendimento. Va anche considerato che spesso l'insegnamento della matematica, e in misura maggiore nei gradi scolastici superiori, non riesce a rispondere appieno alle richieste formative dell'attuale contesto socio-economico, né ai bisogni di apprendimento dei ragazzi. In effetti il livello di formazione matematica è tra le principali cause di selezione scolastica e professionale.

Un'analisi più approfondita rivela la duplice natura culturale della matematica che ha operato sempre su due fronti: risolvere problemi rispondendo agli interrogativi posti dalla realtà e riflettere sulle sue stesse costruzioni culturali. La matematica si presenta dunque come oggetto di studio (conoscenze specifiche), come linguaggio (per descrivere, definire, spiegare, argomentare e dimostrare), come strumento di lettura e interpretazione del reale (matematizzazione e modellizzazione) e come fatto culturale (storia delle idee, rapporto fra matematica e contesti socio-economico-produttivi).

Analogamente, l'insegnamento della matematica si può presentare sotto due aspetti: culturale e di addestramento. Entrambi sono veicoli di competenze, ma la valenza formativa del secondo aspetto esiste soltanto se subordinata al primo. In caso contrario si rischia di produrre un accumulo di sapere inerte. Nell'insegnamento della disciplina, intesa quindi come insieme di procedimenti euristici e di formalizzazione di strutture proprie, il docente dovrà farsi carico di mediare il rapporto fra matematica come strumento per agire nei contesti reali e matematica come scienza autonoma, attraverso la graduale costruzione, l'utilizzo e la comunicazione di modelli interpretativi. Di conseguenza dovrà tenere sotto controllo i conflitti, che spesso si generano nella prassi didattica, fra aspetti intuitivi, algoritmici e formali; conflitti che, se non sanati, divengono per i ragazzi causa di difficoltà nell'apprendimento. Si evidenzia in sostanza la necessità di stabilire procedure didattiche che, nell'affrontare i contenuti tematici disciplinari, sviluppino gradualmente le competenze ritenute irrinunciabili, interpretando operativamente le criticità tipiche dell'educazione matematica. Come utilizzare positivamente, ad esempio, la schematizzazione e la formalizzazione affrontando una situazione problematica? Come mantenere viva l'intuizione durante il processo di addestramento? Come creare contesti idonei ad esercitare e sviluppare la capacità di matematizzazione?

3. Gli aspetti formativi della matematica e i processi di apprendimento

Pur connotandosi la matematica per i suoi livelli di formalizzazione, che ne costituiscono la forza di penetrazione in ogni altro ambito del sapere, è necessaria la consapevolezza che essi vanno conquistati con gradualità. Nell'insegnamento occorre dunque avere ben chiari i traguardi da raggiungere progressivamente per portare gli studenti a una piena competenza nella disciplina.

In particolare occorre far sì che l'allievo non si chiuda all'interno di formalismi fine a se stessi (come spesso è successo nel passato) ma sappia affrontare percorsi finalizzati alla conquista consapevole di *modelli matematici*, ossia schematizzazioni tratte dalla situazione in esame e utilizzabili in un'intera classe di problemi.

Si ottiene così la base della *matematizzazione*: rilevare le attinenze in situazioni diverse, saper discernere gli elementi fondamentali e costitutivi di un problema da quelli accessori, riutilizzare lo stesso modello in situazioni analoghe e comparare le diverse procedure disponibili. Ciò è possibile anche con gli alunni di giovanissima età che partecipano volentieri a questo "gioco" che esprimono con loro parole "… è come quando abbiamo fatto ….".

Va preso atto poi, nell'insegnamento della matematica, dell'evoluzione del contesto socio-culturale-ambientale in cui vivono gli alunni, connotato da generalizzate innovazioni scientifico-tecnologiche. Fino agli anni Cinquanta, ad esempio, gli strumenti di calcolo disponibili (calcolatrici meccaniche, regolo calcolatore, logaritmi) inducevano a far ricorso alle macchine e all'approssimazione nei calcoli ai soli casi strettamente necessari. Si ricercava, ove possibile, il risultato "esatto" anche ricorrendo ad algoritmi elaborati e ad artifizi a volte astrusi, appesantendo così lo sviluppo concettuale a scapito della linearità. Si pensi ad esempio alla quantità di espressioni numeriche e algebriche che richiedevano una gran numero di passaggi a fronte di una ridotta varietà di difficoltà, ad alcuni metodi introdotti per risolvere particolari "tipi" di equazioni, a volte marginali, o per esprimere funzioni integrali per via sintetica anziché ricorrere agli sviluppi in serie. Con l'evoluzione dell'informatica l'elaborazioni dei calcoli viene assegnata alle macchine; interessa quindi far acquisire, piuttosto, il senso e il significato delle operazioni, sviluppare il calcolo mentale, valutare l'approssimazione del risultato e determinarne l'ordine di grandezza. Ciò favorisce il possesso di strumenti per la risoluzione di problemi, per la valutazione della rispondenza del risultato ottenuto e per la verifica della sua attendibilità.

Rilevante per l'apprendimento è anche la conoscenza del contesto storico in cui si sono sviluppate le teorie nei secoli: è una sorta di approccio epistemologico agli sviluppi teorici della matematica per comprenderne le potenzialità. Spesso la formazione degli insegnanti non abbraccia l'evoluzione storica delle idee matematiche, in parte per un retaggio dell'impostazione gentiliana (sviluppo sistematico prioritario rispetto a quello storicistico, riservato alle discipline "nobili") e in parte per la ricerca di un assetto universale, che solo in tempi recenti è stata ridimensionata (ad esempio con i teoremi di incompletezza di Gödel).

Esprimendosi in termini di valenza formativa della matematica, si può concordare sulla sua capacità di favorire una forma mentis che sollecita la conoscenza dei fenomeni, indagandone con metodo le cause, descrivendoli con modalità adeguate, ricercandone spiegazioni e tentando di raggiungere una certa predittività del loro futuro andamento. In questo si concretizza anche il rapporto della matematica con le altre discipline soprattutto dell'area scientifico-tecnologica. A ciò va aggiunto lo sviluppo di una competenza linguistica attenta alla correttezza, alla chiarezza e univocità del linguaggio e all'utilizzo di diversi canali comunicativi, oltre alla formazione di un atteggiamento positivo e della disponibilità a mettersi in gioco anche in situazioni nuove.

Le valutazioni esterne, nazionali e internazionali, sui livelli di apprendimento degli studenti in matematica stanno spostando l'attenzione dai contenuti ai *processi* coinvolti nell'apprendimento. Si tratta sostanzialmente dei meccanismi messi in atto per affrontare le situazioni di apprendimento, capaci di trasformare conoscenze e abilità in competenze. Ciascuno di essi è essenziale e la sua mancanza altera l'equilibrio generale del possesso della disciplina.

Tali processi, correlati e coerenti con le indicazioni programmatiche nazionali per i vari ordini scolastici, sono esplicitati – e qui di seguito riportati - nei Quadri di riferimento per la matematica relativi al I e al II ciclo, pubblicati dall'INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema di Istruzione) a corredo della somministrazione delle prove di verifica e della conseguente lettura degli esiti. Essi sono sostanzialmente identici per i due cicli, sono infatti i livelli raggiunti che diversificano le tappe di crescita del ragazzo lungo il suo percorso di apprendimento. Ciò può essere un buono stimolo per l'elaborazione di un curricolo verticale di matematica e comunque può costituire un solido indirizzo per i docenti della disciplina nella progettazione e conduzione in aula dell'azione didattica e nella predisposizione di verifiche interne complete, articolate e trasparenti.

Processi tipici della matematica:

1. Conoscere e padroneggiare i **contenuti specifici** della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture ...*)
2. Conoscere e utilizzare **algoritmi e procedure** (*in ambito aritmetico, geometrico, algebrico, statistico e probabilistico*)
3. Conoscere **diverse forme di rappresentazione** e passare da una all'altra (*verbale, numerica, simbolica, grafica, ...*)
4. **Risolvere problemi** utilizzando strumenti e strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico - *(individuare e collegare informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di risoluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo, ...)*
5. Riconoscere in contesti diversi il **carattere misurabile** di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (*individuare l'unità o lo strumento di misura più appropriato, …)*
6. Acquisire progressivamente e utilizzare **forme tipiche del pensiero matematico** (*congetturare, argomentare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, dimostrare…)*
7. Utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel **trattamento quantitativo dell'informazione** in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, ...)*
8. Riconoscere le **forme nello spazio** e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, …)*

L'insegnamento della matematica, dunque, sostanziandosi nell'attuazione, insieme agli alunni, di percorsi formativi, favorisce e incrementa l'apprendimento attraverso:

- attività di osservazione (riconoscimento di relazioni, regolarità, differenze, invarianze o trasformazioni nel tempo e nello spazio)

- attività di descrizione (dalle forme verbali o grafiche fino all'utilizzo del linguaggio specifico e degli strumenti matematici, anche simbolici: numeri, figure, misure, ….)
- potenziamento del ragionare, argomentare, affrontare problemi
- sviluppo delle capacità di progettazione e di immaginazione, anche attraverso la risoluzione di problemi non standard

In questa prospettiva diviene significativo il ruolo di volta in volta assunto dall'insegnante nella conduzione della sua attività, ruolo che può essere di valorizzazione delle conoscenze già possedute dagli alunni, di guida verso modi di pensare "più scientifici", di collettore per far convergere le produzioni dei ragazzi verso strutture matematiche consolidate. E' opportuno infatti che modelli e procedure non siano proposti/imposti; anche le convenzioni matematiche devono maturare nella loro comprensione e divenire conquiste. In caso contrario il rischio, per molti alunni, è l'accettazione passiva o l'insuccesso scolastico.

4. Lo sviluppo di competenze e l'ambiente di apprendimento

L'aver considerato la matematica come disciplina di base ha portato a rivedere molti aspetti del suo insegnamento. Un primo passo è stato quello di individuare conoscenze, abilità e competenze essenziali necessarie per tutti, ossia cosa il cittadino deve comunemente conoscere e saper fare in ambito matematico per vivere pienamente la sua cittadinanza.

Per molto tempo, ad esempio, si è ritenuto che il minimo necessario per tutti fosse il calcolo, il cosiddetto "far di conto": in sostanza le operazioni fra numeri e le misure. Il profondo cambiamento sociale intervenuto col passaggio da società agricola a società industriale e, soprattutto, a società terziaria, con le vorticose conseguenze apportate dalla tecnologia e l'aumentata complessità sociale, hanno reso tale conoscenza del tutto insufficiente.

Le competenze necessarie per il cittadino di oggi sono dunque correlate sia ad aspetti sociali che tecnico-culturali. La rapida evoluzione dell'informazione e la facile obsolescenza del sapere, ad esempio, richiedono il possesso di conoscenze e abilità costantemente rinnovate. Se prima era sufficiente, per i più, imparare nel senso di ascoltare, memorizzare e riprodurre, oggi occorre possedere le capacità per padroneggiare e trasferire conoscenze e per seguirne lo sviluppo. La finalità del lavoro scolastico è allora quella di contribuire alla formazione di atteggiamenti e di strutture mentali necessari per orientarsi all'interno del processo evolutivo, per individuare i concetti utili e saperne vagliare l'attendibilità. Una "didattica frontale" non è più sufficiente.

Competenza è dunque un concetto dinamico e complesso, è un intreccio di fattori cognitivi (conoscenze e organizzazione dei concetti correlati), operativi (azioni che si compiono utilizzando le conoscenze), affettivi (motivazione e disponibilità a mettersi in gioco, conferendo un senso alle proprie conoscenze e abilità).

Competenza può essere sostanzialmente definita come capacità di attivare e combinare ciò che si possiede a livello di conoscenze e abilità, come capacità sociali e/o metodologiche, come motivazione e volontà per svolgere positivamente un compito in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale. Presuppone una conoscenza non nozionistica del sapere in quanto essere competenti significa saper utilizzare le conoscenze all'interno di una varietà di contesti. E' centrata su un apprendimento significativo che richiede cura per la persona che apprende, in un ambiente funzionale al suo coinvolgimento.

[Un analogo concetto di competenza è indicato nel documento tecnico allegato al Regolamento DM 22/08/2007 sul Nuovo obbligo di istruzione]

Nelle Indicazioni per il curricolo del I ciclo il termine competenza è accompagnato dalla parola "traguardi" intesi non tanto come punto di arrivo o come obiettivi statici della disciplina, ma come direzioni verso cui tendere per ampliare e migliorare i propri livelli di competenza.

Parlando di matematica il riferimento è ai documenti formali del MIUR (Indicazioni per il curricolo del I ciclo/2007, Indicazioni nazionali per i Licei/2010, Linee guida per gli Istituti Tecnici

e per gli Istituti Professionali/2010, Obbligo di istruzione/2007) oltre che al framework di PISA 2012, espressamente dedicato alla matematica.
L'analisi di questi documenti evidenzia una linea comune, infatti il percorso verso le competenze non può che essere lineare e seguire il processo di crescita del ragazzo, nella consapevolezza che non esistono competenze diverse per ciascun livello scolastico, ma livelli in progressione per ogni competenza. Nel rimandare alla lettura dei documenti, si riporta in sintesi quanto proposto nelle Indicazioni per il curricolo del I ciclo.
Matematica: *Offre strumenti per la conoscenza scientifica del mondo, per operare nella realtà e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana, contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni altrui. Non ridotta ad un insieme di regole, ma contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo*
Il Nuovo obbligo di istruzione e le Linee Guida per gli Istituti Professionali non fanno che rinforzare la stessa idea di competenza matematica così come la *Literacy matematica* per gli studenti quindicenni di PISA 2012.
Le Linee Guida per gli Istituti Tecnici e le Indicazioni per i Licei aggiungono, per il termine del quinquennio, competenze più specifiche, indicando anche *la padronanza del linguaggio formale e dei procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), collocando il pensiero matematico nei grandi temi dello sviluppo della storia delle idee, della cultura, delle scoperte scientifiche e delle innovazioni tecnologiche e il possesso degli strumenti e delle metodologie necessari per la comprensione, la costruzione e l'operatività di modelli matematici in un insieme di fenomeni*

Le *competenze matematiche* hanno dunque aspetti più interni alla disciplina (padronanza di concetti, possesso di strumenti, procedure,…) ed altri che escono dalla disciplina stessa per connotare il comportamento cognitivo e operativo della persona (atteggiamenti, linguaggi, ragionamento, argomentazioni, lettura e interpretazione di contesti e fenomeni, soluzione di situazioni problematiche,...)
Le competenze possono essere possedute a diversi livelli: il quadro teorico di riferimento del PISA li riunisce, ad esempio, in tre raggruppamenti, utilizzabili dai docenti per le osservazioni sistematiche al fine delle previste valutazioni e certificazioni:
Riproduzione (operazioni e procedure di routine, utilizzo in situazioni note di semplici modelli appresi, uso di un linguaggio consueto e di rappresentazioni standard in situazioni familiari)
Connessioni (individuazione di relazioni e modelli noti per la soluzione di problemi anche non di routine, comunicazione dei risultati, passaggio da una rappresentazione ad un'altra, uso di variabili)
Riflessione (pianificazione di strategie di soluzione di problemi complessi e meno familiari, approfondimenti e valutazioni sui processi utilizzati; individuazione e costruzione di modelli a partire da modelli noti; formulazione di ragionamenti matematici e di catene di ragionamenti).

I termini utilizzati per le competenze matematiche mettono l'accento sul coinvolgimento attivo nel "fare matematica". L'insegnamento deve avviare gradualmente, a partire da situazioni significative per gli alunni, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematici quali strumenti per interpretare il reale e non proporre unicamente un bagaglio astratto di nozioni. Molte criticità dell'insegnamento della matematica, con conseguenze evidenti nelle valutazioni degli apprendimenti, nazionali e internazionali (ad es. la difficoltà dei ragazzi a tutti i livelli di scolarità ad utilizzare modelli matematici in situazioni concrete o a interpretare a livello teorico il risultato ottenuto) derivano dalla prevalenza data all'operatività in modelli precostituiti e apodittici. Per converso, attività di costruzione di modelli a partire da casi concreti senza poi approfondire le analogie con situazioni similari o acquisire in essi la necessaria operatività, ostacolano ulteriori sviluppi, creando apprendimenti superficiali ed effimeri.

L’alunno deve essere soggetto attivo, che sviluppa proprie strategie. L’insegnante non è più il pastore, ma il trainer. Poiché ciascun allievo ha proprie capacità e ritmi di apprendimento e tutti devono raggiungere un adeguato livello di competenza, è necessaria e opportuna una *metodologia laboratoriale*, ossia l’attivazione di percorsi e sollecitazioni in cui ciascuno è seguito, stimolato e verificato. E’ una strategia che presuppone la centralità dell’ambiente di apprendimento, dove siano possibili percorsi variegati e multipli per poter operare scelte, verificarle e giustificarle: un contesto, cioè, idoneo a valorizzare l’esperienza e le conoscenze degli alunni, a favorire la curiosità, l’esplorazione e la scoperta, a promuove la consapevolezza delle proprie potenzialità e attitudini e del proprio modo di apprendere al fine di “imparare ad apprendere” anche in funzione orientativa. La classe non si comporta come un gruppo omogeneo che marcia compatto, ma come individui che muovono assieme o in piccoli gruppi verso traguardi differenziati, ma coerentemente allineati. Si sviluppano così anche sinergie di gruppo, integrazione e condivisione di conquiste e di apprendimenti.

In senso lato “laboratorio” è una modalità di lavoro che rinforza la problematizzazione e la progettualità, coinvolge gli allievi nel pensare-realizzare-valutare attività vissute in modo partecipato; richiede un uso flessibile degli spazi usuali della scuola e/o disponibilità di luoghi attrezzati. Riconcettualizzata ad ogni livello di scolarità, la didattica laboratoriale non è riducibile a un semplice fare, poiché utilizza modi scientificamente fondati per ottenere risultati alti dal punto di vista linguistico (si spiega il perché delle scelte) e concettuale (pensiero e operatività per rispondere a situazioni problematiche). La disciplina da così significato agli aspetti di competenza

Sotto questo profilo le tecnologie forniscono un valido supporto: dalla partecipazione a lezioni individuali, singole o interattive, alla ricerca critica di risposte a curiosità o problemi, al consolidamento di conoscenze e tecniche operative nei modelli sviluppati. Gli allievi possono muovere da uno stimolo unitario per percorre la propria strada, soli o in gruppi più o meno ampi, sotto l’attenta osservazione e guida dell’insegnante e intersecarsi periodicamente per confronti e scambi. L’uso di attrezzature informatiche, come dimostrano ad esempio le recenti esperienze con le LIM (Lavagne Interattive Multimediali), consente agli insegnati di mantenere il controllo di una situazione così complessa e agli allievi di essere facilitati attraverso l’utilizzo di strumenti a loro familiari.

5. Per l’elaborazione di un curricolo verticale di matematica – la scelta dei contenuti

Si sono fin qui delineati gli elementi strutturali per l’elaborazione di un curricolo di scuola, inteso come sistema di scelte per i docenti chiamati ad estrarre elementi di sapere disciplinare dal loro bagaglio culturale per riambientarlo nel contesto sempre unico della propria aula e farlo diventare sapere appreso e competente dell’allievo (costruzione di conoscenze, abilità e competenze). I docenti dovranno condividere ed esplicitare le competenze trasversali, pluridisciplinari e disciplinari che intendono collegialmente sviluppare e i processi, di disciplina o comuni a più discipline, da concordare in verticalità anche fra diversi gradi scolastici. L’organizzazione del percorso degli allievi deve poi avere al centro la scelta dei contenuti disciplinari su cui imperniare l’insegnamento quale contributo strategico della disciplina al curricolo stesso.

Per quanto riguarda la conoscenza dei contenuti della matematica, si può solo rimandare ai manuali e ai testi specifici; qui ci si limita a fornire una traccia per scelte strategiche e correlazioni fra i contenuti stessi..

. I nuclei tematici previsti dai disposti ministeriali per il I ciclo sono: N*umeri*, *Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Misure, dati e previsioni.* Solo nel ciclo successivo si parla, per i primi due nuclei, di *Aritmetica e Algebra* e di *Geometria.* Questa scelta sembra indicare che a livello di I ciclo si debbano privilegiare gli oggetti matematici rispetto alle strutture disciplinari. Le strutture sottese, che saranno affrontate con maggior forza di astrazione negli anni successivi, non saranno quindi date apodditticamente, ma progressivamente conquistate, in modo che ciascuno ne acquisisca gradualmente le peculiarità.

Numeri-Aritmetica e algebra. Diceva Kronecker: “I numeri naturali sono opera di Dio, tutto il resto è opera dell’uomo”. Effettivamente il bambino, fin dalla prima età, si avvicina ai numeri come segno e strumento per interagire con la realtà, raggruppa e ordina secondo criteri diversi e, partendo da “uno” e “tanti”, compie ben presto l’operazione del contare. Costruisce così, oltre all’ordinalità, anche la cardinalità attraverso l’aggiunta di “uno” e la distinzione intuitiva degli insiemi di cose secondo la quantità degli oggetti.

All’inizio del I ciclo si fa ripercorrere razionalmente questo processo in modo che il bambino ne prenda coscienza, individui con chiarezza la cardinalità intesa come “quantità di oggetti” e la sappia ordinare riscoprendo che ogni numero n, da 1 in poi, ha un suo preciso successivo ($n+1$) e un preciso antecedente ($n - 1$) di cui esso è il successivo. Secondo questo ordinamento la sequenza dei numeri ha un inizio e non una fine. Vengono così conquistati due concetti fondamentali dell’aritmetica: ordinalità e cardinalità. Il primo numero naturale è *zero*, concetto per noi usuale ma per nulla immediato; esso conferisce dignità di numero all’assenza di cose.

La manipolazione fra numeri in situazioni concrete fa emergere le operazioni (correlate al mettere insieme e al separare) e le loro proprietà che il bambino deve razionalizzare come intrinseche alla struttura numerica, percependone le potenzialità e le conseguenze sulla natura dei numeri stessi, sul calcolo e sulla risoluzione di problemi. All’inizio l’alunno viene stimolato al calcolo mentale, aiutandosi con oggetti o materiale strutturato. In questa fase i simboli numerici sono utilizzati come ideogrammi, ma una volta raggiunta la padronanza di questo modo di calcolare, ci si porrà il problema di scrivere i numeri scoprendo l’utilità di una base che permetta di rappresentarli senza bisogno di una infinità di simboli. Si possono così affrontare la moltiplicazione e la “operatività polinomiale” correlata alla base (posizionalità). L’introduzione contemporanea del linguaggio della teoria degli insiemi e dei primi rudimenti di logica permette di abituare, in modo semplice, alla precisione.

Ogni problema o quesito va accompagnato fin dall’inizio da schematizzazioni o rappresentazioni per facilitare il processo di astrazione e favorire gradualmente il passaggio al formale. In particolare la rappresentazione dei numeri sulla retta rafforza la nozione di successivo e consente mediante “salti” di rivedere sotto altra luce gli argomenti affrontati fra cui la moltiplicazione intesa come gioco coi multipli. Molti problemi trovano soluzione con questo strumento. Anche le progressioni aritmetiche e geometriche si possono ottenere per questa via.

La necessità di rispondere a problemi non risolubili in ambito naturale poterà agli ampliamenti numerici. Spetta al docente scegliere se affrontare prima i numeri interi e quindi i razionali o, viceversa, prima i razionali assoluti e successivamente gli interi e i razionali relativi. La tradizione suggerisce la seconda via, privilegiando gli aspetti moltiplicativi e introducendo dapprima le frazioni e successivamente i “numeri con segno”, ma saranno le questioni concrete e le curiosità dei bambini a suggerire la strada. La rappresentazione sulla retta consente di percepire la “densità” dei numeri razionali e la infinità nei due sensi dei numeri relativi.

L’introduzione dei razionali presuppone l’uso delle frazioni (superamento del concetto di successivo, equivalenza tra frazioni e necessità di ricorrere a frazioni con le stesso denominatore per poterle sommare) e dei numeri decimali, che possono essere introdotti come conseguenza della divisione con resto o a seguito di attività di misurazione.

Utilizzando le frazioni come operatori si risolvono ulteriori problemi posti da situazioni concrete.

Il calcolo mentale, costantemente utilizzato, è occasione per valutare l’ordine di grandezza del risultato atteso. Si può affrontare anche il problema dell’approssimazione, della valutazione dell’errore e di come esso si trasmette mediante le operazioni, discutendo sui casi in cui è significativo o trascurabile.

L’introduzione della calcolatrice deve avvenire gradualmente e nelle situazioni ritenute opportune, ad esempio per non perdere la concentrazione sui percorsi risolutivi dei problemi o per verificare la correttezza dei calcoli. In ogni caso occorre che il bambino individui l'insieme numerico in cui si deve trovare il risultato di un problema e che sappia spiegare il ragionamento fatto

Quanto sopra è alla base della costruzione dell'intera teoria aritmetico–algebrica. Gli altri argomenti da sviluppare nel I ciclo sono conseguenze ottenute mediante ampliamenti e successive astrazioni. Gli stessi concetti di potenza e multiplo possono essere visti come conseguenze della moltiplicazione e dell'addizione, mettendone in luce le forti analogie, pur in presenza di significative differenze. E' infine utile adombrare i numeri reali, ad esempio facendo scoprire che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia due.

Passando al II ciclo

Sia nel I che nel II ciclo è opportuno evitare eccessivi particolarismi e tecnicismi di calcolo, soprattutto se utilizzati in modo acritico o decontestualizzato.

Spazio e figure - Geometria. La conquista dello spazio è un elemento fondamentale della vita del bambino fin da quando impara a orientarsi, a collocare correttamente se stesso, gli oggetti e le persone, a seguire un percorso sulla base di indicazioni e a rappresentare con disegni la realtà esplorata e percepita. Tali competenze, insite nella sua natura, vengono opportunamente indirizzate fino a sviluppare l'organizzazione delle strutture spaziali e l'analisi delle figure, scoprendo attinenze e diversità. Il bambino spesso confonde la forma con la sua posizione: ad esempio, una losanga posta verticalmente viene considerata diversa da un rombo disposto con due lati paralleli al bordo della lavagna. Occorre dunque far riconoscere le figure indipendentemente dalla loro posizione. Ciò consente di "smaliziare" l'allievo nell'individuazione delle loro proprietà. Sono funzionali a questo scopo il disegno (anche con l'uso di strumenti per acquisire la manualità) e il racconto (per abituare alla precisione di linguaggio). Un gioco utile è il "telefono": un gruppo racconta a un altro una figura che ha disegnato, senza farla vedere; poi si confrontano i disegni. Si fanno così cogliere le ambiguità insite nel linguaggio parlato e si affina l'esposizione.

E' essenziale anche la percezione delle immagini spaziali. Spesso si rappresenta una figura tridimensionale come insieme di figure bidimensionali; in questo modo si toglie al bambino la capacità di avere una percezione spaziale delle forme, carenza che può permanere anche in età adulta. Costruire figure sviluppabili e disegnarne lo sviluppo piano può aiutare, così come creare figure non sviluppabili o anche le rigate (costruite con gli spaghettini).

La scoperta dello spazio, dopo un primo sviluppo di percorsi graficamente introdotti, può avvenire anche attraverso il movimento delle figure, facendo percepire le trasformazioni del piano in sé e dello spazio in sé, ad esempio mediante le deformazioni di una figura di gomma, osservando l'ombra di un oggetto in rapporto all'oggetto stesso, la sua immagine allo specchio o il suo spostamento. Dopo aver analizzato le corrispondenze generate da questi movimenti, anche con l'ausilio di opportuni software didattici (es. Cabrì), si può ragionare su ciò che muta e ciò che resta invariato nella trasformazione; importante è che le osservazioni nascano dagli allievi opportunamente stimolati. In particolare si possono analizzare le trasformazioni topologiche (deformazioni con la gomma), le similitudini e le isometrie dirette e inverse; irrinunciabile è comunque il lavoro sulle simmetrie assiali che consente di sviluppare operativamente gran parte della geometria "classica".

L'introduzione di una metrica, anche attraverso misure realizzate strumentalmente, consente di affrontare gli aspetti quantitativi della geometria. Equiestensione e isoperimetria, anche di figure irregolari a partire da quelle elementari, conducono al più ampio concetto di equivalenza a alla scoperta di π. Parimenti, per i solidi più semplici, si affronta il concetto di volume come spazio occupato.

Contemporaneamente si utilizzano le coordinate cartesiane che affinano il senso della collocazione dei punti nel piano e della misura. I concetti sviluppati attraverso l'osservazione si perfezionano e trovano un'espressione sempre più formalizzata. Anche la precisione linguistica e terminologica ne traggono giovamento e, senza imposizioni, si riesce a passare dalle descrizioni alle definizioni. Le coordinate cartesiane permettono anche di correlare numeri e figure, trasferendo dall'uno all'altro campo i risultati ottenuti.

Passando al II ciclo …

<u>*Relazioni e funzioni*</u>. Fin dalla scuola dell'infanzia il bambino è stato indirizzato a classificare e a ordinare. Passando alla scuola primaria questi concetti trovano un perfezionamento con la scoperta delle relazioni d'ordine e di equivalenza e delle proprietà che le caratterizzano.

Fra le relazioni, rappresentate anche con grafici e tabelle, se ne trovano alcune che, una volta note, consentono di individuare la loro immagine in maniera univoca: le funzioni (i tasti di un pianoforte individuano le rispettive corde senza vederle). Si può allora rappresentare un percorso matematico mediante funzioni operativamente descritte o un problema attraverso l'uguaglianza di più percorsi o la ricerca degli elementi, inizialmente non noti, che conducono a un dato risultato. Si introducono così le cosiddette "funzioni matematiche" e le equazioni (di 1° grado), nonché la soluzione di problemi mediante equazioni. Quanto alla risoluzione delle equazioni di 1° grado è opportuno evitare tecnicismi fine a se stessi, ricorrendo piuttosto al significato di =, alle operazioni inverse o alla verifica di un risultato ipotizzato.

Il piano cartesiano, nei casi più semplici e compatibilmente con le competenze degli alunni, può consentire risoluzioni grafiche di equazioni e quindi di problemi correlati. Parallelamente è possibile tracciare per punti i diagrammi di alcune funzioni essenziali, quali la proporzionalità diretta (retta), quella inversa (iperbole) e la funzione quadratica (parabola), in modo che gli allievi imparino a muoversi in autonomia in questo campo e sappiano passare da semplici espressioni matematiche ai grafici e viceversa.

Il passaggio al primo e al secondo biennio del II ciclo ….

<u>*Misure, dati e previsioni.*</u> Le indicazioni nazionali per il I ciclo prevedono esplicitamente il tema "misure" con la conoscenza delle principali unità di misura e l'effettuazione di misurazioni e stime. In realtà pare più funzionale stemperare questo argomento in modo trasversale, affrontandolo in ciascuno dei nuclei tematici per la parte correlata. Ad esempio in *Spazi e figure* si possono inserire confronti e misure di angoli, segmenti, superfici e volumi; in *Numeri* le scale graduate; in *Relazioni e funzioni* il passaggio da una misura a un'altra e più in generale le relazioni fra misure. Ancor più si possono trattare le misure operativamente nell'ambito delle scienze sperimentali e della tecnologia, correlandole con la vita quotidiana.

Riferendosi a dati e previsioni, fin dalla scuola primaria si usa raccogliere indicazioni e dati in tabelle, abituando anche a leggerle e interpretarle. Molti problemi concreti vengono proposti o risolti con l'uso di tali strumenti.. Analogamente, gli alunni imparano a raccogliere e interpretare le frequenze di una caratteristica o di un fenomeno. Lo scopo di questa attività è saper manipolare i dati raccolti, compararli, rielaborarli, trarne semplici considerazioni, senza pretendere di condurre vere e proprie indagini statistiche. In questo modo si abituano gli allievi a familiarizzare con questi strumenti, gestendo frequenze e medie aritmetiche e a trarne informazioni e alcune prime deduzioni: linee di tendenza, legami, ipotesi risolutive.

Parallelamente, in situazioni concrete si può discutere il modo di assegnare una probabilità ad eventi aleatori e di operare confronti per prendere decisioni.

Nel II ciclo …

5. Il dialogo fra la matematica e le altre discipline

Si è più volte suggerito, anche per il II ciclo, di fare riferimento a problemi concreti nello sviluppo dell'insegnamento della matematica. Oltre ai problemi opportunamente scelti per motivi strettamente didattici, possono venire incontro al docente anche i legami con altre discipline, insegnate da lui stesso o da colleghi. Sono quasi d'obbligo i "collegamenti" con la fisica, le scienze naturali e, più in generale, le discipline tecnico – scientifiche, con le quali si condividono spesso linguaggi e processi di apprendimento. Un vero dialogo all'interno dei Consigli di classe, soprattutto in sede di progettazione del percorso degli studenti, può far superare eventuali discrasie temporali o metodologiche nello sviluppo di specifici contenuti che abbiano attinenza con altre discipline oltre alla matematica. Bisogna porre attenzione a che le diversità di approccio non disorientino lo studente, e che un eventuale anticipo di contenuti, strumenti o riferimenti operativi venga poi riassorbito, potenziato e sistematizzato nelle varie discipline nel rispetto reciproco.

Ancora più interessante è il dialogo fra la matematica e le altre aree, tradizionalmente "non scientifiche". L'adattamento e l'utilizzo non forzoso di strumenti e modelli matematici per affrontare situazioni o problemi non matematici di altre discipline favorisce quella forma mentis necessaria nell'ottica della "matematica per il cittadino" e contribuisce, oltre al potenziamento di competenze nella disciplina, anche lo sviluppo di competenze "trasversali", relative allo studente in quanto persona.

Ci sono infine settori della matematica che suggeriscono sviluppi adeguati ai contesti reali. Si va dalla matematica finanziaria, alla attuariale, alla ricerca operativa, ai giochi di strategia, alla teoria dei giochi, ai problemi di ottimizzazione nelle diverse accezioni. E ancora molte altre.

6. La matematica e la storia del pensiero e delle idee

La storia della matematica è strumento privilegiato non solo per capire le ragioni che hanno portato allo sviluppo di determinate teorie, ma anche per comprendere meglio le teorie stesse e i conseguenti legami con altri ambiti del sapere, in particolare con la filosofia, oltre che per "umanizzare" la disciplina agli occhi degli studenti. Le origini, le modalità e il contesto in cui sono nate le diverse teorie matematiche mettono poi in luce quanto esse abbiano contribuito allo sviluppo del pensiero anche in altri ambiti (ad esempio le equazioni di Maxwell per descrivere i fenomeni elettromagnetici) e quanto la necessità di particolari strumenti matematici abbia contribuito allo sviluppo di aspetti nuovi della matematica stessa (ad esempio la ricerca operativa derivata da esigenze belliche).

Inizialmente saranno racconti che chiariscono come è nata la matematica, quali sono stati i problemi che hanno portato al suo sviluppo. Fra gli esempi più noti: la geometria e la distribuzione delle terre dopo le alluvioni del Nilo, la scrittura dei numeri nelle varie culture, i pitagorici e lo "scandalo" del teorema di Pitagora o, in tempi più recenti, il calcolo delle probabilità e il gioco d'azzardo. Gli argomenti sono veramente tanti da consentire una vasta scelta.

Un discorso più ampio e sistematico è opportuno nel II ciclo.

A titolo esemplificativo: i greci e lo sviluppo della geometria; il blocco dell'aritmetica dopo la scoperta della incommensurabilità; i grandi problemi dell'antichità; l'infinito potenziale e attuale; Fibonacci e il Liber abaci; la prospettiva e la pittura; le due concezioni geometriche di Cartesio e Desargues e i successivi sviluppi; Leibnitz, il calcolo differenziale e la ricerca del linguaggio universale; Pascal e i suoi studi matematici (pascalina e probabilità); Gaulois, il suo duello e la risolubilità delle equazioni; Frege e il paradosso russelliano; Mandelbrot e i frattali. In ogni caso è opportuno affrontare, in particolare nei licei, il problema dei fondamenti della matematica e delle sue diverse concezioni.

Questi ed altri argomenti possono essere sviluppati di concerto soprattutto con l'insegnante di filosofia, ma anche di lettere o di storia dell'arte. Laddove non è previsto l'insegnamento della filosofia è utile comunque che l'allievo si renda conto che la matematica ha un suo sviluppo concettuale e di pensiero e che non è solo insieme di tecniche o risoluzione di problemi.

«Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è solo tecnica e non anche cultura generale; solo calcolo e non anche filosofia cioè pensiero valido per tutti, non avrei mai fatto il matematico (non continuerei a farlo)» - L. Lombardo Radice, Milano 1965.

7. Valutare per migliorare

Il rapporto degli studenti con l'apprendimento della matematica è spesso ancora ritenuto un fatto individuale dello studente stesso, legato a elementi personali o del contesto di appartenenza e sul quale il docente ha poca possibilità di intervento. Oggi la ricerca del miglioramento si impone nella consapevolezza dei difformi livelli di prestazione del servizio formativo e della qualità degli apprendimenti, fra scuole o all'interno della scuola stessa. Utile allo scopo è una più stretta correlazione fra la valutazione delle abilità e delle competenze dei singoli allievi, affidata ai docenti e la verifica sistematica sugli apprendimenti degli studenti e sulla qualità complessiva dell'offerta formativa, affidata all'INVALSI.

In particolare è importante che i docenti riflettano su come articolare il curricolo, quali atteggiamenti e processi cognitivi degli alunni osservare, come individuare l'insorgere di conflitti cognitivi, di misconcezioni e di altri ostacoli di natura didattica o epistemologica da tenere sotto controllo per attivare interventi migliorativi. In questo consiste l'efficacia delle azioni di recupero, piuttosto che la ripetizione rituale di quanto già spiegato e non compreso. Occorre cioè saper trarre dalla valutazione, interna o esterna, ogni opportunità per il confronto costruttivo, per l'elaborazione di strategie di miglioramento, per il superamento di situazioni di criticità.

Se una verifica è ben strutturata, l'analisi dei quesiti proposti correlata agli esiti fornisce elementi utili di valutazione non solo sul possesso di nozioni e sui processi di apprendimento, ma anche sulle scelte e sull'efficacia delle pratiche didattiche e organizzative utilizzate.

Si può riflettere su alcune difficoltà diffuse per capirne le cause e cercare soluzioni. Ad esempio: gli alunni non sono abituati a giustificare una risposta già data nel testo; forniscono spesso spiegazioni incoerenti con le scelte fatte e argomentazioni frettolose che poggiano sul solo utilizzo di esemplificazioni; hanno poca dimestichezza con la generalizzazione e l'uso del linguaggio simbolico. O ancora: gli alunni manifestano difficoltà nel passare da un codice linguistico a un altro e nell'individuare informazioni implicite; denotano scarsa familiarità con problemi legati a contesti reali e con la possibilità di più percorsi risolutivi. Evidenziano superficialità nella lettura del testo, scarsa riflessione sul significato dei dati, applicazione acritica di algoritmi e procedure, poca dimestichezza con il calcolo veloce e con stime e approssimazioni. Queste o altre criticità possono essere individuate dai docenti. Alcune sono relative a processi di apprendimento comuni a più discipline e l'intervento di miglioramento può essere contemporaneo su più fronti e quindi più efficace. Quello che emerge è che la valutazione deve poggiare sulla qualità degli errori commessi (o non) piuttosto che sulla loro quantità.

Il discorso è analogo, ma a collegialità potenziata, per quanto riguarda le competenze, con attenzione al fatto che esse non coincidono con gli apprendimenti e quindi non è corretto trasportare automaticamente nella certificazione di competenze le stesse valutazioni espresse per gli apprendimenti.

Quanto alle prove di verifica esse dovrebbero essere diversificate, come struttura e come tempo assegnato, a seconda degli obiettivi che si propongono. Si possono utilizzare prove chiuse e strutturate che prevedono una risposta breve e univoca per verificare l'acquisizione di nuove conoscenze o abilità, prove semistrutturate che consentono anche scelte e interventi personali, prove aperte che prevedono strategie e argomentazioni, prove stratificate, anche di gruppo, per l'osservazione dei livelli di competenza. In questo caso, ricordando che la competenza si manifesta se "messa alla prova", per osservare e inferire il possesso di competenze a diversi livelli, occorrono compiti "autentici" o in situazione che richiedano di attivare tutte le risorse, cognitive e non, e che consentano di connettere scuola e mondo reale.

In generale le prove dovrebbero rispondere ad alcune caratteristiche: viene recuperato il sapere pregresso? Vengono sollecitati processi cognitivi caratterizzanti? Stimolano l'interesse degli studenti? Viene offerta l'opportunità di diverse soluzioni? Sfidano le capacitò degli studenti?